حسین کریمی

بازخوانی مسئلهٔ زمین پدربزرگ

در شـــمارهٔ ۱۰۹ «برهان ریاضی» و در ایســـتگاه چهـــارم اندیشـــه و ادب ریاضی (صفحهٔ ۳۹)، مســـئلهٔ زمین پدربزرگ **جمشید** با قلم شیوای آقای **هوشنگ شرقی** به صورت زیر از طرف جمشید برای دوستانش **کاوه**، **شهریار**، **فرهاد**، **بابک** و **مازیار** مطرح شده بود.

● **جمشید:** پدربزرگ من سال‌ها پیش از دنیا رفته بود. او زمینی داشـــت دقیقاً مربع‌شکل و دور تا دور زمین را درختان گردو کاشـــته بود. او قبل از آنکه از دنیا برود، وصیت کرده بود زمین را بین پدرم و ســـه پسر دیگرش به چهار قســـمت مساوی تقســـیم کنند. ولی وقتی سر زمین رفتنـــد، دیدند که عده‌ای از خدا بی‌خبر درختان دور زمیـــن را قطع کرده و برده‌اند و فقط روی هر ضلع مربع یک درخت باقی مانده اســـت. آن‌ها به چه روشی عمل کردند تا حدود زمین را مشخص کنند؟

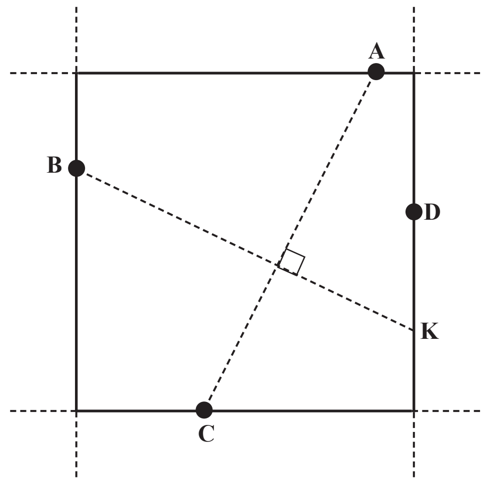
● **کاوه:** در واقع مسئله به‌طرز رسم مربعی ختم می‌شود که از هر ضلع آن فقط یک نقطه را در دست داریم.

● **شهریار:** کاوه جان حـــرفت کاملاً درســـت است، اما چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ من پیشـــنهاد می‌کنم تا فردا همگی روی این مسئله فکر کنیم.

فردا رسید و دوستان دور هم جمع شدند. از چهره‌ها معلوم بود که به جز بابک بقیه به نتیجه‌ای نرســـیده‌اند. تصمیم گرفتند که جمشید نحوهٔ پیدا کردن ابعاد زمین را توسط پدر و عموهایش برای آن‌ها تعریف کند.

● **جمشید:** انجـــام کـــار برای آن‌ها هم ساده نبود. آن‌هـــا هم چند روزی فکر کردنـــد. به‌خصوص که یکی از عموهایم مهندس بود و او بود که توانســـت مسئله را ختم به خیر کند.

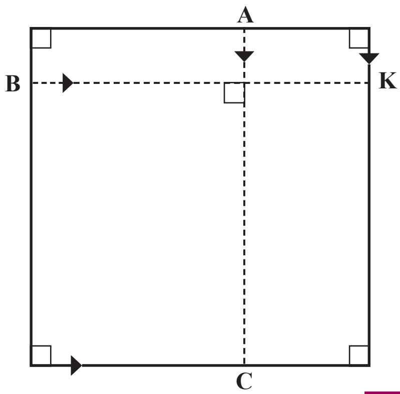
راه‌حل عمویم به این صورت بود:
چهار درخت را در نقاط A، B، C و D در نظر می‌گیریم. (شکل ۱). AC را رسم می‌کنیم و سپس از B عمودی بر آن می‌کشیم. BK را مساوی AC جدا می‌کنیم. K را به D وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. اولین ضلع مربع روی امتداد DK است. سپس از A و C عمودهایی بر این خط رسم می‌کنیم تا امتداد دو ضلع دیگر مربع به‌دست آیند. از B بر این دو امتداد عمود رسم می‌کنیم تا مربع به‌دست آید.



شکل ۱

من از عمویم پرسیدم این راه از کجا به ذهن شما خطور کرد؟ و در ثانی، با رسم BK هم‌اندازه و عمود بر AC، چه تضمینی است که K نقطه‌ای از مربع باشد؟

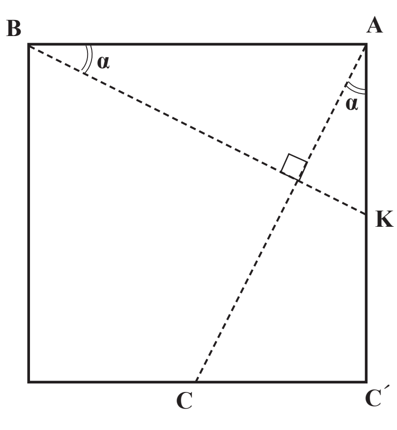
عموجان گفت: «اگر از یک ضلع مربع دو نقطه مانند D و K را داشته باشیم، مسئله همان‌گونه که دیدی به راحتی حل می‌شود. اما باید نقطهٔ پنجم (K) را به‌دست آوریم. می‌دانیم در هر مربع ضلع‌های مجاور هم‌اندازه و بر هم عمودند. بنابراین اگر A و B دو نقطهٔ واقع بر دو ضلع مجاور از یک مربع باشند و از آن نقاط خطوطی به موازات ضلع‌های مجاورشان رسم کنیم (AC و BK)، آن‌گاه AC و BK مساوی یکدیگرند (هم‌اندازه با ضلع مربع) و نیز بر هم عمود خواهند بود (زاویه‌های رأس‌های مربع قائمه هستند: AC⊥BK و AC=BK).



شکل ۲

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر AC بر دو ضلع مربع عمود نباشد (که به تبع آن موازی با دو ضلع دیگر هم نخواهد بود) آیا می‌توان BK را هم‌اندازه و عمود بر آن پیدا کرد به‌طوری که K هم روی ضلع چهارم مربع باشد؟

ابتدا حالت خاص شکل ۳ را درنظر گرفتم و مشاهده کردم: AC=BK و AC⊥BK و K نیز روی مربع واقع است. از آنجا به این فکر افتادم که ضرورتی نیست، نقاط A و B حتماً روی رأس‌ها باشند. چون می‌توان AC را به موازات خودش روی دو ضلع روبه‌رو و BK را نیز به موازات خودش روی دو ضلع روبه‌روی دیگر لغزاند که نه عمود بر هم بودنشان دچار مشکل شود و نه هم‌اندازه بودنشان. بدین ترتیب بود که در حالت کلی از دو لم زیر استفاده کردم:

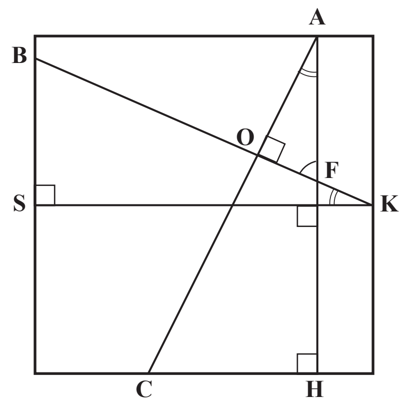


شکل ۳

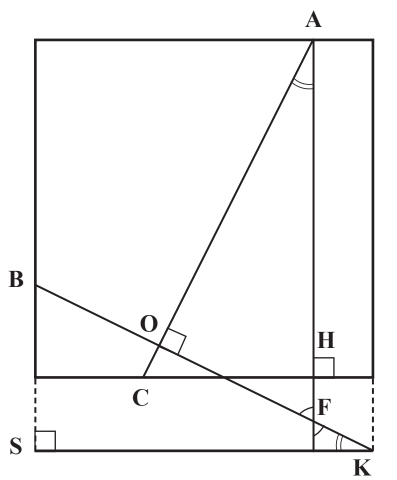
لم ۱: نقاط A، B و C واقع بر سه ضلع از مربعی را در نظر می‌گیریم. از B عمودی بر AC رســم می‌کنیم تا ضلع چهارم یا امتــداد آن را در K قطع کند. در این صورت: BK=AC.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=90^\circ-\hat{F}\\ \hat{K}=90^\circ-\hat{F}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{K}\\ AH=KS\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ز-ض-ز}}\overset{\Delta}{AHC}\cong\overset{\Delta}{BSK}$$

و در نتیجه: BK=AC



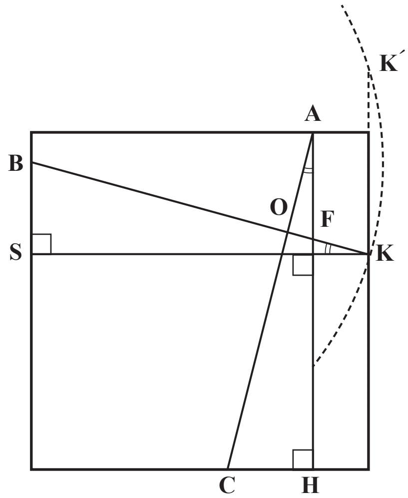
شکل ۴



شکل ۵

لم ۲: نقاط A، B و C واقع بر ســه ضلع از مربعی را درنظر می‌گیریم. نقطــهٔ K روی ضلع چهارم و یا در امتداد آن با شرط AC=BK موجود است؛ به طوری که BK و AC بر هم عمودند.

در مربع به ضلع a داریم: AC≥a



شکل ۶

پس اگر دایره‌ای به مرکز B و به شــعاع AC رسم کنیــم، با ضلع چهــارم و یا با امتــداد آن در یک یا دو نقطه مشترک خواهد بود که یکی از آن نقاط K است و خواستهٔ لم را تأمین می‌کند.

$$BK=AC, AH=KS\Rightarrow\overset{\Delta}{ACH}\cong\overset{\Delta}{BSK}\xrightarrow{\text{و-ض}}\hat{A}=\hat{K}$$
$$\Rightarrow\hat{A}=90^\circ-\hat{F}\Rightarrow\hat{O}=90^\circ\Rightarrow BK\perp AC$$

نتیجه: اگر A، B و C واقع بر سه ضلع از مربعی باشند، آن‌گاه پاره‌خط BK هم‌اندازه و عمود بر AC وجود دارد که K روی ضلع چهارم و یا در امتداد آن واقع است.

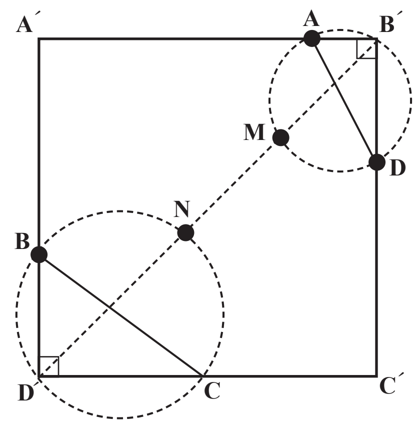
چهرهٔ بچه‌ها مملو از شادی بود؛ به‌خاطر حل شدن مســئله و هم به‌خاطر مطالب جدیــدی که یاد گرفته بودند. فقط چهــرهٔ فرهاد بود که نشــان از کمی عدم رضایت داشت.

- **بابک:** من راه‌حل دیگری هــم دارم. البته نه اینکه خودم حل کرده باشــم، نــه. دیروز ســراغ کتاب‌های دایرةالمعارف هندســه رفتم و در یکــی از آن کتاب‌ها راه‌حلی دیدم که برایتان آورده‌ام.
- **مازیار:** دایرةالمعارف هندســه؟ تا به حال اسمش را نشنیده بودم.
- **بابک:** دایرةالمعارف هندســه که توســط اســتاد **محمدهاشم رســتمی** تألیف و جمع‌آوری شده و در «انتشارات مدرســه» به چاپ رسیده، بی‌نظیر است. تا امروز ۱۸ جلد آن چاپ شده و چند جلد دیگر آن آمادهٔ چاپ است.

یکی از مهم‌ترین خصوصیت‌های این مجموعه، تفکیک کتاب‌ها با موضوع‌های مشخص است. فهرست‌بندی آن نیز فوق‌العاده دقیق است که پیدا کردن مسائل مربوط به موضوعی خاص را آسان‌تر می‌کند. در این کتاب‌ها، علاوه بر بیان و حل مسائل متنوع، قضیه‌ها و تعریف‌ها، حتی اشاره‌ای هم به تاریخ ریاضیات شده است.

راه‌حل دوم مسئله[1]

فرض کنیم مربع $A'B'C'D'$ همان مربع گذرا از چهار نقطهٔ A، B، C و D باشد. داریم: $D'=B'=90^\circ$. بنابراین دایرهٔ به قطر AD از رأس B' و دایرهٔ به قطر BC از رأس D' خواهد گذشت.



شکل ۷

محل برخورد $B'D'$ (قطر مربع) را با دو دایره، نقطه‌های M و N می‌نامیم. نقطهٔ M وسط کمان $\overset{\frown}{AMD}$ و نقطهٔ N وسط کمان $\overset{\frown}{BNC}$ است. (قطر $B'D'$ نیم‌ساز زاویه‌های $\hat{B}'$ و $\hat{D}'$ است، پس: $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MD}$ و $\overset{\frown}{BN}=\overset{\frown}{NC}$) اکنون به شرح زیر عمل می‌کنیم:

دایره‌ای به قطر BC و دایرهٔ دیگری به قطر AD رسم و وسط‌های دو کمان $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AD}$ را به هم وصل می‌کنیم (M وسط $\overset{\frown}{AD}$ و N وسط $\overset{\frown}{BC}$ است). امتداد MN دو دایره را در نقطه‌های B' و D' قطع می‌کند. از نقطهٔ B' دو خط گذرا از A و D و از نقطهٔ D' دو خط گذرا از B و C رسم می‌کنیم. این خط‌ها در نقاط A' و C' متقاطع خواهند بود و مربع $A'B'C'D'$ همان مربع خواسته شده است.

گویا سؤالی ذهن فرهاد را بد جوری به خودش مشغول کرده بود و می‌شد به وضوح آن را در چهرهٔ او دید. بچه‌ها مشغول صحبت بودند، اما فرهاد گوشه‌ای با قلم و کاغذی که در دست داشت، غرق فکر بود. توجه همهٔ بچه‌ها به فرهاد جلب شد. مازیار پرسید: «چی شده؟ مشکلی پیش آمده؟»

فرهاد: صبر کنید، مسئله همیشه جواب یکتا ندارد. الان متن کامل آن را می‌نویسم....

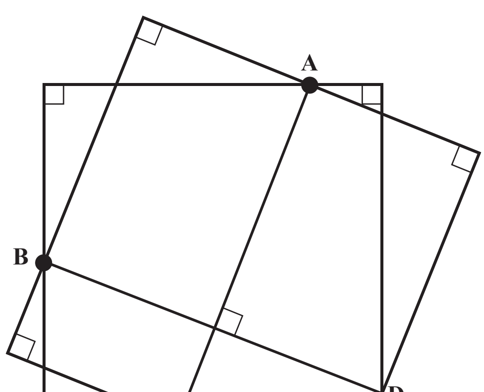
دقایقی بعد، او متن زیر را ارائه کرد:

«اکنون به یک مشکل بر می‌خوریم: اگر در راه‌حل اول، نقطهٔ K بر نقطهٔ D منطبق باشد، یعنی چهار نقطهٔ A،B،C و D چنان باشند که: AC=BD و $AC\perp BD$. در این صورت امتدادی به نام DK نخواهیم داشت و امتداد اولین ضلع از مربع به‌دست نخواهد آمد.

همچنین در راه‌حل دوم، اگر وسط دو کمان یعنی نقطه‌های M و N بر هم منطبق باشند، در آن صورت امتدادی به نام MN نخواهیم داشت تا دایره‌ها را در نقاط B' و D' قطع کنند و در این صورت دو رأس از مربع به‌دست نخواهند آمد. این مشکل زمانی رخ می‌دهد که مانند مشکل راه‌حل اول، AC=BD و $AC\perp BD$ باشد.

به‌عنوان تمرین دلیل انطباق M و N را در حالت خاص فوق اثبات کنید.

پس نتیجه می‌گیریم که در صورت‌مسئله باید قید می‌شد که دو پاره‌خط واصل بین درخت‌های روبه‌رو در زمین پدربزرگ جمشید، هم‌اندازه و عمود بر هم نیستند.



شکل ۸

پی‌نوشت

۱. از صفحهٔ ۱۷۶ دایرةالمعارف هندسه، جلد ۱۳